1. Buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk semua bilangan asli

n : 1+2+ 22+23+…+ 2n−1=2n−1

Bukti :

Misalkan P(n) adalah 1+2+ 22+23+…+ 2n−1=2n−1

P(n)akan benar untuk n=1 karena 21−1=21−1

Andaikan P(n) benar, maka kita harus tunjukan bahwa P(n+1) juga benar, sehingga :

1+2+ 22+23+…+ 2n−1+2(n+1)−1

=2n−1+2(n+1)−1

=2n−1+2n

=2(n+1)−1=P(n+1)

Dengan demikian pernyataan 1+2+ 22+23+…+ 2n−1=2n−1 terbukti benar.

1. Buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk semua bilangan asli n :  
   1+1/2+1/4+…….+21−n=2−21−n

Bukti :

Andaikan P(n) adalah 1+1/2+1/4+…….+21−n=2−21−n

P(n)akan benar untuk n=1 karena 21−1=21−1

Andaikan P(n) benar, maka kita harus buktikan bahwa P(n+1) juga

benar, sehingga :

1+1/2+1/4+…….+21−n +21−(n+1)

=2−21−n+21−(n+1)

=2−21.2−n+2−n

=2−2−n(2−1)

=2−2−n

=2−21−(n+1)

=P(n+1)

Jadi P(n) terbukti benar.

Dengan demikian pernyataan 1+1/2+1/4+…….+21−n=2−21−n terbukti benar

1. Buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk semua bilangan asli n,

1+3+32…+3n−1=1/2(3n−1)

Bukti :  
Andaikan P(n) adalah 1+3+32…+3n−1=1/2(3n−1)

P(n) benar untuk n=1 karena 31-1=1/2(31-1)

Andaikan P(n) benar, maka kita harus buktikan bahwa P(n+1) juga benar, sehingga :

1+3+32…+3n−1+3(n+1)−1

=1/2(3n−1)+3(n+1)−1

=1/2(3n−1)+3n

=1/2.3n−1/2+3n

=3/2.3n−1/2

=1/2(3(n+1)−1)

=P(n+1)

Jadi P(n) terbukti benar.

Dengan demikian pernyataan 1+3+32…+3n−1=1/2(3n−1)

terbukti benar

1. Buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk semua bilangan asli n,  
   1+2.2+3.22+…+n.2n−1=1+(n−1).2n

Bukti :

Misalkan P(n) adalah 1+2.2+3.22+…+n.2n−1=1+(n−1).2n

P(n)benar untuk n=1 karena 1.21−1=1+(1−1)21

Andaikan P(n) benar, maka kita harus buktikan bahwa P(n+1) harus benar, sehingga :

1+2.2+3.22+…+n.2n−1+(n+1).2(n+1)−1

=1+(n−1).2n+(n+1).2(n+1)−1

=1+(n−1)2n+(n+1).2n

=1+(n−1+n+1)2n=1+(2n)2n

=1+n.2n+1

=1+[(n+1)−1]2n+1

=P(n+1)

Jadi P(n+1) terbukti benar.

Dengan demikian pernyataan 1+2.2+3.22+…+n.2n−1=1+(n−1).2nterbukti benar.

1. Buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk setiap bilangan asli n,  
   12+22+32+…….+n2=1/6n(n+1)(2n+1)

Bukti :  
Misalnya P(n) adalah 12+22+32+…….+n2=1/6n(n+1)(2n+1)

P(n) benar untuk n=1 karena 12=1/6.1.(1+1)(2.1+1)

Andaikan P(n) benar , maka harus dibuktikan bahwa P(n+1) harus benar juga, sehingga :

12+22+32+…….+n2+(n+1)2

=1/6n(n+1)(2n+1)+(n+1)2

=(n+1)/6x{n(2n+1)+6(n+1)}

=n+1/6(2n2+n+6n+6)

=(n+1)/6x(2n2+7n+6)

=(n+1)/6(n+2)(2n+3)

=1/6(n+1){(n+1)+1}{2(n+1)+1}

=P(n+1)

Jadi P(n+1) terbukti benar

Dengan demikian pernyataan 12+22+32+…….+n2=1/6n(n+1)(2n+1)

terbukti benar

1. Buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk setiap bilangan asli n,  
   1/2+2/22+3/23+…….n/2n=2−(n+2)/2n

Bukti:  
Misalkan P(n) adalah 1/2+2/22+3/23+…….n/2n=2−(n+2)/2n

P(n) benar untuk n=1 karena 1/21=2−(1+2)/21

Andaikan P(n) benar, maka buktikan bahwa P(n+1) juga benar, sehingga :

1/2+2/22+3/23+…….n/2n +(n+1)/2(n+1)=2−(n+2)/2n+(n+1)/2(n+1)

=2+(−2n−4+n+1)/2n+1

=2+(−n−3)/2n+1

=2−(n+3)/2n+1

=2−((n+1)+2)/2n+1

=P(n+1)

Jadi terbukti P(n+1) benar

Dengan demikian pernyataan 1/2+2/22+3/23+…….n/2n=2−(n+2)/2n terbukti benar

1. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n,  
   (1+x)n≥1+nx

Bukti :  
Misalkan P(n) adalah (1+x)n≥1+nx

P(n) benar untuk n=1 karena (1+x)1≥1+1.x

Andaikan P(n) benar, maka kita harus buktikan bahwa P(n+1) benar, sehingga :

(1+x)n+1≥(1+xn)(1+x)

(1+x)n+1≥1+(n+1)x+nx2, sehingga

(1+x)n+1≥1+(n+1)x=P(n+1)

Jadi terbukti bahwa P(n+1) benar

Dengan demikian, pernyataan (1+x)n≥1+nx terbukti benar

1. Buktikan dengan induksi matematika bahwa a2n−1+b2n−1 habis dibagi oleh a + b untuk semua bilangan asli n.

Bukti :  
Misalkan P(n) adalah a2n−1+b2n−1

P(n) benar untuk n=1 karena a2.1−1+b2.1−1=a+b habis dibagi oleh a+b

Andaikan P(n) benar, maka harus dibuktikan bahwan P(n+1) juga benar, sehingga :

a2(n+1)−1+b2(n+1)−1

=a2n+1+b2n+1

=a2.a2n−1+b2.b2n−1

=a2.a2n−1+b2.b2n−1−b2.a2n−1+b2.a2n−1

=(a2−b2)a2n−1+b2(a2n−1+b2n−1)

=(a+b)(a−b)a2n−1+b2(a2n−1+b2n−1)

= P(n+1)

Ruas kanan dari identitas diatas habis dibagi oleh a + b sehingga ruas kirinya juga habis dibagi oleh a + b

Jadi terbukti bahwa P(n + 1) benar.

Dengan semikian pernyataan bahwa a2n−1+b2n−1 habis dibagi oleh a + b untuk semua bilangan asli n terbukti.

1. Buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk semua bilangan ganjil n, n3−n habis dibagi 24

Bukti :  
Misalkan P(n)=n3−n

P(n) benar untuk n=3 karena 33−3=24 habis dibagi 24

Andaikan P(n) benar, maka kita tunjukan bahwa P(n+2) juga benar,

sehingga untuk bilangan berikutnya (n+2),

(n+2)3−(n+2)

=n3+6n2+12n+8−n−2

=n3−n+6n2+12n+6

=(n3−n)+6(n+1)2

Bentuk (n+1)2 menjadi kuadrat bilangan genap berarti habis dibagi oleh 24, sehingga kedua ruas itu habis dibagi 24

Jadi terbukti bahwa P(n+2) juga benar.

1. Buktikan dengan identitas matematika bahwa untuk setiap bilangan bulat positif n, 32n+22n+2 habis dibagi 5

Bukti :  
Misalkan P(n) adalah 32n+22n+2

P(n) benar untuk n=1 karena 32.1+22.1+2=25 habis dibagi 25

Andaikan P(n) benar, kita harus buktikan bahwa P(n+1) juga benar, sehingga :

32(n+1)+22(n+1)+2

=32.32n+22.22n+2

=(10.32n+5.22n+2)−(32n+22n+2)

=5(2.32n+22n+2)−(32n+22n+2)

ternyata ruas kanan habis dibagi 5, maka ruas kiri juga habis dibagi 5

Jadi P(n+1) terbukti benar

Dengan demikian pernyataan untuk setiap bilangan bulat positif n,

32n+22n+2 habis dibagi 5 terbukti benar

1. Buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk setiap bilangan asli n, n(n2+2) habis dibagi oleh 3.

Bukti :  
Misalkan P(n) adalah n(n2+2)

P(n) benar untuk n=1 karena 1(12+2)=3 habis dibagi 3

Andaikan P(n) benar, kita harus membuktikan bahwa P(n+1) juga benar, sehingga :

(n+1)[(n+1)2+2]

=(n+1)(n2+2n+1+2)

=(n+1)(n2+2n+3)

=n3+3n2+5n+3

=n(n2+2)+3(n2+n+3)

karena ruas kanan habis dibagi 3, maka ruas kiri juga habis dibagi 3

Jadi P(n + 1) terbukti benar

Dengan demikian n(n2+2) habis dibagi oleh 3 terbukti benar

1. Buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk setiap bilangan asli n, 72n+1+1 habis dibagi oleh 8

Bukti :  
Misalkan P(n) adalah 72n+1+1

P(n) benar untuk n=1 karena 72.1+1+1=344 habis dibagi 8

Andaikan P(n) benar , maka kita harus buktikan bahwa P(n+1) benar, sehingga :

72(n+1)+1+1

=72.72n+1+1

=72.72n+1+1−72n+1+72n+1

=(72−1).72n+1+72n+1+1

=48.72n+1+72n+1+1

Karena ruas kanan dapat dibagi dengan 8 maka ruas kiri juga dapat dibagi kiri.

Jadi P(n+1) terbukti benar.

Dengan demikian pernyataan 72n+1+1 habis dibagi oleh 8 terbukti benar

1. Buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk setiap bilangan asli n, 24n+3+33n+1 habis dibagi oleh 11.

Bukti :  
Andaikan P(n) adalah 24n+3+33n+1

P(n) benar untuk n=1 karena 24.1+3+33.1+1=209 habis dibagi 11

Andaikan P(n) benar, maka kita harus buktikan bahwa P(n+1) juga benar, sehingga :

24(n+1)+3+33(n+1)+1

=24.24n+3+33.33n+1

=24.24n+3+33.33n+1−24.33n+1+24.33n+1

=(33−24).33n+1+24(24n+3+33n+1)

=11.33n+1+24(24n+3+33n+1)

Karena ruas kanan dapat dibagi dengan 11, maka ruas kiri dapat dibagi dengan11

Jadi P(n+1) terbukti benar

Dengan demikian pernyataan 24n+3+33n+1 habis dibagi oleh 11 terbukti benar

KUNCI : Bila ruas kanan dapat dibagi x, maka ruas kiri juga dapat dibagi x.